

INTERNATIONAL JOURNAL OF  
EDUCATION, PSYCHOLOGY  
AND COUNSELLING  
(IJEPC)

[www.ijepe.com](http://www.ijepe.com)



MODUL KEMAHIRAN BERFIKIR ALGEBRA UNTUK PELAJAR  
TINGKATAN SATU

*AN ALGEBRAIC THINKING SKILLS MODULE FOR FORM ONE STUDENTS*

Janet Jahudin<sup>1</sup>, Siew Nyet Moi<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Fakulti Psikologi dan Pendidikan, Universiti Malaysia Sabah  
Email: janetjahudin@gmail.com

<sup>2</sup> Fakulti Psikologi dan Pendidikan, Universiti Malaysia Sabah  
Email: sopiah@ums.edu.my

\* Corresponding Author

**Article Info:**

**Article history:**

Received date: 22.01.2024

Revised date: 12.02.2024

Accepted date: 29.02.2024

Published date: 18.03.2024

**To cite this document:**

Jahudin, J., & Siew, N. M. (2024). Modul Kemahiran Berfikir Algebra Untuk Pelajar Tingkatan Satu. *International Journal of Education, Psychology and Counseling*, 9 (53), 394-415.

DOI: 10.35631/IJEPC.953030.

This work is licensed under [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Abstrak:**

Kemahiran Berfikir Algebra (KBA) merupakan salah satu aspek kemahiran yang perlu dikuasai oleh pelajar bagi menyelesaikan masalah bukan rutin. Kemahiran ini juga diperlukan sebagai asas persediaan pelajar memasuki pengajian universiti dan bidang pekerjaan yang memerlukan pemikiran logik dan analisis. Namun begitu, prestasi pelajar Malaysia dalam penyelesaian masalah algebra masih belum mencapai tahap memuaskan mengikut laporan TIMSS 2019 dan PISA 2018. Justeru, Modul Kemahiran Berfikir Algebra (MBA) dibangunkan untuk memupuk KBA melalui tiga konstruk iaitu i) generalisasi aritmetik, ii) fungsi, dan iii) pemodelan. MBA dibangunkan dengan berteraskan kaedah heuristik melalui Model penyerapan Polya dan bar digital. Model bar adalah ilustrasi segi empat tepat yang dibina bagi mewakili kuantiti yang diketahui dan tidak diketahui serta hubungan antara kuantiti. Model bar digital merujuk kepada aplikasi percuma model bar pada pautan <https://mathsbot.com/manipulatives/bar>. Ujian KBA dibina dan ditadbirkan sebagai ujian pra dan pasca ke atas 120 pelajar Tingkatan Satu dari sebuah sekolah luar bandar di Sabah. Dapatan ujian-t sampel berpasangan menunjukkan terdapat perbezaan skor min yang signifikan antara ujian pra dan ujian pasca ( $t(119) = -17.553, p < .05$ ) selepas intervensi menggunakan MBA. Ini menunjukkan MBA dapat meningkatkan KBA melalui kaedah heuristik. Inovasi ini diharapkan dapat dikembangkan di sekolah luar bandar bagi membentuk pelajar yang berfikiran algebra dan celik teknologi digital.

**Kata Kunci:**

Kemahiran Berfikir Algebra; Model Bar Digital; Model Polya; Penyelesaian Masalah Bukan Rutin

**Abstract:**

Algebraic Thinking Skills (KBA) is one aspect of skills that students need to master in order to solve non-routine problems. These skills are also needed as a basis for preparing students to enter university studies and job fields that require logical and analytical thinking. However, the performance of Malaysian students in solving algebraic problems has not yet reached a satisfactory level according to the TIMSS 2019 and PISA 2018 reports. Thus, the Algebraic Thinking Skills Module (MBA) was developed to foster KBA through three constructs namely i) arithmetic generalization, ii) functions, and iii) modeling. MBA is developed based on heuristic methods through Polya absorption Model and digital bar. A bar model is a rectangular illustration constructed to represent known and unknown quantities and relationships between quantities. The digital bar model refers to the free application of the bar model at the link <https://mathsbot.com/manipulatives/bar>. The KBA test was constructed and administered as a pre- and post-test to 120 Form One students from a rural school in Sabah. The results of the paired sample t-test showed that there was a significant difference in the mean score between the pre-test and the post-test ( $t(119) = -17.553, p < .05$ ) after the intervention using MBA. This shows that MBA can improve KBA through heuristic methods. This innovation is expected to be developed in rural schools to form students who think algebraically and are literate in digital technology.

**Keywords:**

Algebraic Thinking Skills; Digital Bar Model; Polya Model; Non-Routine Problem Solving

**Pengenalan**

Kemahiran berfikir algebra merupakan salah satu aspek kemahiran yang perlu dikuasai oleh pelajar bagi menyelesaikan masalah bukan rutin. Masalah bukan rutin adalah masalah matematik yang memerlukan lebih daripada sekadar menggunakan algoritma atau formula untuk diselesaikan. Masalah ini sering melibatkan pemikiran kreatif dan kritis, memerlukan pelajar menganalisis masalah, berfikir secara fleksibel, dan menggunakan strategi penyelesaian masalah untuk mencari penyelesaian. Masalah bukan rutin juga boleh mempunyai lebih dari satu kaedah penyelesaian untuk menggalakkan pemahaman matematik yang lebih mendalam dan membangunkan kemahiran menyelesaikan masalah pelajar (Norshafariza Mamat & Muhammad Nubli Abdul Wahab, 2022). Kemahiran berfikir algebra juga diperlukan sebagai asas persediaan pelajar memasuki pengajian universiti dan bidang pekerjaan yang memerlukan pemikiran logik dan analisis. Namun demikian, penguasaan kemahiran berfikir algebra dalam penyelesaian masalah dalam kalangan pelajar di Malaysia masih berada dalam tahap penandaarasan yang amat lemah berdasarkan hasil dapatan *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) (Mullis, 2017). Malaysia hanya mampu menduduki tangga ke 29 daripada 42 negara yang menyertai TIMSS malahan dapatan pencapaian TIMSS juga menunjukkan hanya 5% pelajar boleh mengaplikasi, membuat penaakulan dan generalisasi dalam soalan yang melibatkan penyelesaian masalah algebra.

Menurut Stacey (2005), cabaran utama dalam pembelajaran penyelesaian masalah bukan rutin ialah pelajar memerlukan pelbagai kemahiran dalam menyelesaikan suatu masalah. Oleh itu, pengajaran penyelesaian masalah dianggap sebagai salah satu topik yang kompleks untuk

diajar (Dendane, 2009). Menurut Reiss dan Renkl (2002), dan Novotná (2014), kaedah heuristik mampu meningkatkan kemahiran penyelesaian masalah bukan rutin.

Kaedah heuristik merupakan strategi penyelesaian masalah matematik yang diformulasikan bebas daripada konteks dan dilakukan secara sistematik (Koichu, Berman & Moore, 2004). Menurut Pólya (1965), penyelesaian heuristik bertujuan untuk memahami langkah-langkah yang membawa kepada penyelesaian yang berkesan terhadap situasi-situasi bermasalah, terutamanya proses mental membentuk hubungan, kesatuan, dan perbandingan sepanjang proses penyelesaian. Heuristik ini berdasarkan Polya dibahagikan kepada empat peringkat: memahami situasi masalah, merancang strategi, melaksanakan strategi, dan akhirnya menyemak semula penyelesaian yang diperolehi. Dalam proses pengajaran-pembelajaran algebra, penyelesaian masalah heuristik berpusat pada penguasaan konsep-konsep algebra melalui aktiviti-aktiviti yang berkait rapat dengan konteks tertentu. Ini melibatkan penyelesaian masalah kehidupan seharian yang mungkin tidak jelas atau kompleks.

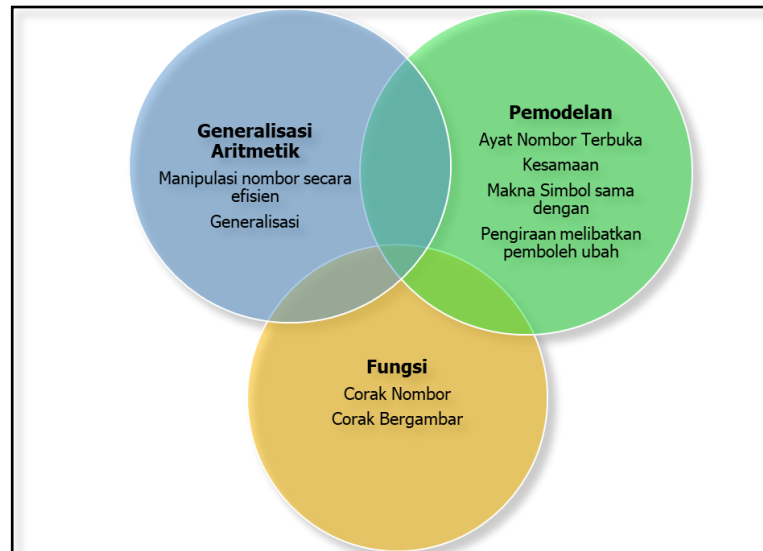
Koichu, Berman, dan Moore (2004) juga bersetuju bahawa kaedah heuristik perlu diketengahkan dalam kelas matematik. Selain itu, menurut Hoon, Kee, dan Singh (2013), lukisan bar merupakan salah satu kaedah heuristik yang membantu pelajar dalam menyelesaikan masalah bukan rutin. Demikian juga, model penyelesaian masalah Polya bergantung kepada kaedah heuristik dalam penyelesaian masalah (Polya, 1945). Justeru, Modul Kemahiran Berfikir Algebra diketengahkan menggunakan kaedah heuristik dalam usaha memupuk kemahiran berfikir algebra khususnya yang melibatkan penyelesaian masalah bukan rutin.

### **Tinjauan Literatur**

Pembangunan Modul Kemahiran Berfikir Algebra didasari oleh i) Model Pembelajaran Kemahiran Berfikir Algebra Ralston (2013), ii) Model Penyelesaian Masalah Polya (Polya, 1945), dan iii) model bar.

#### ***Model Kemahiran Berfikir Algebra Ralston (2013)***

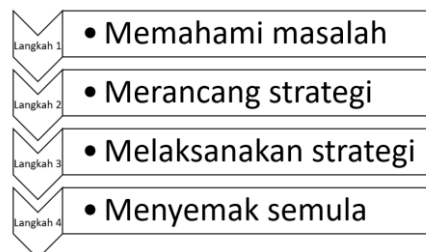
Kemahiran berfikir algebra (KBA) yang dibangunkan dalam Modul Kemahiran Berfikir Algebra adalah berasaskan kepada Model Kemahiran Berfikir Algebra (MKBA) Ralston (2013). MKBA Ralston (2013) berfokuskan kepada tiga konstruk iaitu i) Generalisasi Aritmetik - melibatkan manipulasi nombor secara efisien dan generalisasi), ii) Fungsi - melibatkan hubungan antara sesuatu kuantiti berdasarkan kebolehan pelajar dalam mengenalpasti, memperihalkan serta membentuk corak daripada kemahiran generalisasi, dan iii) Pemodelan- melibatkan kesetaraan dan kesamaan, sistem nombor terbuka dan pengiraan yang melibatkan pemboleh ubah (Rajah 1).



**Rajah 1: Model Kemahiran Berfikir Algebra Ralston (2013)**

### ***Model Penyelesaian Masalah Polya (1945)***

Model Penyelesaian Masalah Polya (1945) menjadi teras kepada aktiviti dalam Modul Kemahiran Berfikir Algebra yang merangkumi empat peringkat, iaitu; (i) memahami masalah, (ii) merancang strategi, (iii) melaksana strategi dan (iv) menyemak semula. Rajah 2 menunjukkan fasa - fasa penyelesaian masalah melalui Model Polya.



**Rajah 2: Fasa - Fasa Penyelesaian Masalah Melalui Model Polya (1945)**

### ***Model Bar***

Model Bar merupakan gambar rajah berbentuk bar yang dibina bagi membantu proses penyelesaian masalah berayat. Model bar adalah ilustrasi segi empat tepat yang mewakili kuantiti yang diketahui dan tidak diketahui serta hubungan antara kuantiti yang dinyatakan mengikut kehendak soalan. Rajah 3 menunjukkan satu contoh Model Bar dalam penyelesaian masalah algebra.

Hasil tambah tiga nombor ganjil berturut-turut ialah 231. Apakah nombor itu?  
*The sum of three consecutive odd numbers is 231. What are the numbers?*

Jawapan / Answer: [ 3 markah/marks]

Perkaitan antara tiga nombor ganjil yang berturutan berdasarkan corak nombor

x	x + 2	x + 2 + 2
231		

Keseragaman panjang bar sebagai tanda kesamaan nilai

3x	6
231	

3x	6
225	6

x	x	x
75	75	75

Tiga nombor tersebut ialah 75, 77 dan 79

### Rajah 3: Ilustrasi penggunaan Model Bar dalam Penyelesaian Masalah

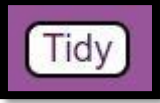


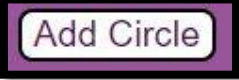


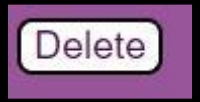

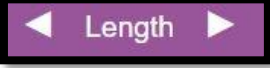




Melalui pelaksanaan Model Bar dalam soalan ini, pelajar boleh melihat dengan jelas perkaitan antara tiga nombor ganjil berturutan dan kemudian menukarkan hubungan tersebut ke dalam bentuk persamaan. Bar atas dan bar bawah dibina dalam keadaan sama panjang untuk mewakili kesamaan nilai pada kedua-dua bar tersebut. Hal ini membantu pelajar untuk memahami bahawa makna kesamaan dalam usaha menyelesaikan soalan yang diberikan.




Modul Kemahiran Berfikir Algebra menengahkan Model Bar Digital sebagai jantung kepada inovasi ini. Model Bar Digital merujuk kepada aplikasi Model Bar percuma pada pautan <https://mathsbot.com/manipulatives/bar>. Pelajar boleh memanipulasikan aplikasi ini dengan membangunkan penyelesaian berbantuan model bar rekaan mereka sendiri. Model Bar Digital (MBA) berfungsi sebagai kaedah untuk mencungkil dan mengasah kemahiran berfikir algebra pelajar melalui teknologi digital.

#### Elemen Dalam Aplikasi Model Bar Digital

Jadual 1 di bawah menunjukkan elemen yang terdapat dalam aplikasi model bar digital yang boleh digunakan oleh guru dan pelajar.

Jadual 1: Elemen Dalam Aplikasi Model Bar Digital

No	Elemen	Label Butang	Fungsi
1.	<i>Susun</i>		Butang ini berfungsi untuk menyusun semula aplikasi dalam keadaan asal, sebagai butang <i>reset</i> .
2.	<i>Tambah</i>		Butang ini berfungsi untuk menambah bar.
3.	<i>Segmen</i>		Butang ini berfungsi untuk menambah kurungan segmen yang boleh digunakan sebagai label kepada bar atau untuk menunjukkan perwakilan kepada bar.
4.	<i>Bulatan</i>		Butang ini berfungsi untuk menambah bulatan.
5.	<i>Posisi</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah kedudukan posisi bar secara menegak atau melintang.
6.	<i>Garisan</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah jenis garisan untuk bar.
7.	<i>Hapus</i>		Butang ini berfungsi untuk memadam bar.
8.	<i>Warna</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah suai warna pada bar dan garisan bar.
9.	<i>Panjang</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah suai panjang bar.
10.	<i>Lebar</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah lebar bar.
11.	<i>Bahagian</i>		Butang ini berfungsi untuk memisahkan bar kepada beberapa bahagian.
12.	<i>Duplikasi</i>		Butang ini boleh digunakan untuk menduplikasikan bar, sama ada duplikasi ke kiri, kanan, atas atau bawah.
13.	<i>Teks</i>		Butang ini digunakan untuk menambah teks di dalam bar atau di luar bar.

14.	<i>Bantuan</i>		Butang ini adalah butang bantuan. Penerangan cara menggunakan aplikasi ada diberikan apabila anda menekan butang ini.
15.	<i>Grid</i>		Butang ini digunakan untuk mengubah aplikasi model bar kepada mod grid.
16.	<i>Bar</i>		Ini adalah bar. Anda boleh menulis teks dan nombor secara terus dalam bar tersebut.

### Tatacara Langkah Penggunaan Aplikasi Model Bar Digital dalam Menyelesaikan Masalah Algebra

Jadual 2 menunjukkan langkah-langkah utama sebelum menggunakan aplikasi Model Bar Digital dalam menyelesaikan masalah algebra.

**Jadual 2: Langkah Utama Sebelum Menggunakan Aplikasi Model Bar Digital**

No	Langkah	Penerangan
1	Memahami Soalan	Pelajar boleh menyatakan dengan jelas maklumat yang diketahui dalam soalan penyelesaian masalah yang diberikan. Pelajar boleh menyatakan dengan jelas apa yang perlu dicari atau diselesaikan berdasarkan soalan penyelesaian masalah tersebut.
2	Merancang Strategi	Pelajar boleh mewakili pemboleh ubah yang sesuai berdasarkan soalan penyelesaian masalah. Pelajar boleh menyatakan pernyataan dan operasi yang sesuai untuk mewakili soalan penyelesaian masalah yang diberikan. Pelajar boleh membentuk persamaan linear dalam satu atau dua pemboleh ubah untuk mewakili keseluruhan soalan penyelesaian masalah yang diberikan.

### Langkah Penyelesaian Masalah Algebra dalam Persamaan Linear menggunakan Aplikasi Model Bar Digital

Berikut adalah satu contoh penyelesaian masalah algebra menggunakan aplikasi Model Bar Digital.

#### Soalan

Sebuah persatuan telah menjual sejumlah 150 keping tiket bagi konsert amal yang akan diadakan sempena Bulan Kemerdekaan. Tiket bagi orang dewasa berharga RM20 manakala



tiket bagi kanak-kanak ialah RM15. Jumlah jualan keseluruhan tiket adalah sebanyak RM1360. Berapakah bilangan tiket bagi orang dewasa dan tiket bagi kanak-kanak yang telah dijual?

### a. Memahami soalan

Maklumat yang diketahui

Jumlah tiket terjual = 150 keping

Harga tiket dewasa = RM20

Harga tiket kanak-kanak = RM15

Jumlah keseluruhan = RM1360

Apakah yang perlu dicari?

Bilangan tiket terjual bagi orang dewasa dan bilangan tiket terjual bagi kanak-kanak

### b. Merancang Strategi

Apakah pemboleh ubah yang sesuai?

$d$  = bilangan tiket terjual bagi orang dewasa

$k$  = bilangan tiket terjual bagi kanak-kanak

Apakah pernyataan yang sesuai?

i. Bilangan tiket dewasa + bilangan tiket kanak-kanak = Bilangan tiket terjual

ii. (Bilangan tiket orang dewasa X harga tiket orang dewasa) + (Bilangan tiket kanak-kanak X harga tiket kanak-kanak) = Jumlah jualan keseluruhan

Apakah bentuk persamaan linear?

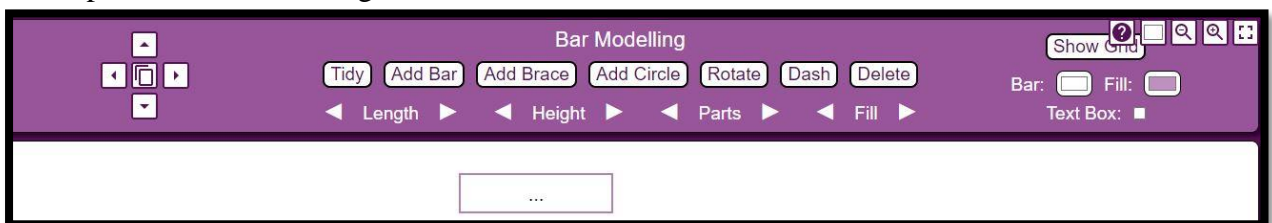
$$d + k = 150$$

$$15d + 5k = 1360$$

### c. Melaksanakan Strategi Penyelesaian Menggunakan Model Bar Digital

Langkah 1:

Buka aplikasi Model Bar Digital



**Rajah 4: Ruang Utama Aplikasi Model Bar Digital**

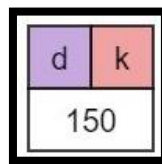
Langkah 2:

Bina bar seperti Rajah 6 di sebelah untuk mewakili dua persamaan tersebut. Gunakan butang **Tambah** untuk menambah bar. Sila pastikan anda memindahkan bar sedia ada (Rajah 5) untuk mengelakkan pertindihan bar. Setelah menambah bar, anda boleh menggunakan butang **Panjang** untuk mengubah suai panjang bar.

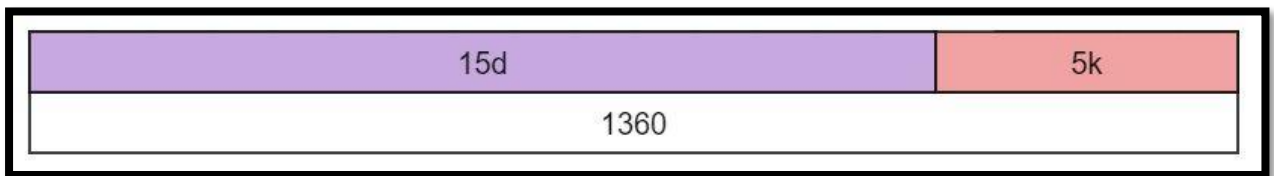




**Rajah 5: Kedudukan Asal Bar**



Persamaan 1



Persamaan 2

**Rajah 6: Bar Yang Mewakili Persamaan 1 Dan Persamaan 2 Berdasarkan Soalan Yang Diberikan**

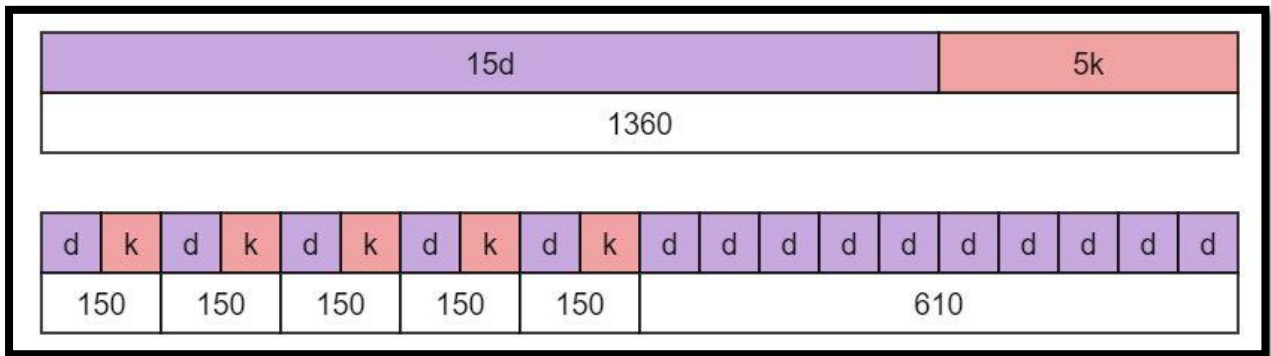
\*Nota: Gunakan butang **Warna** untuk mengubah suai warna kotak mengikut kesesuaian sendiri.



**Rajah 7: Butang Warna**

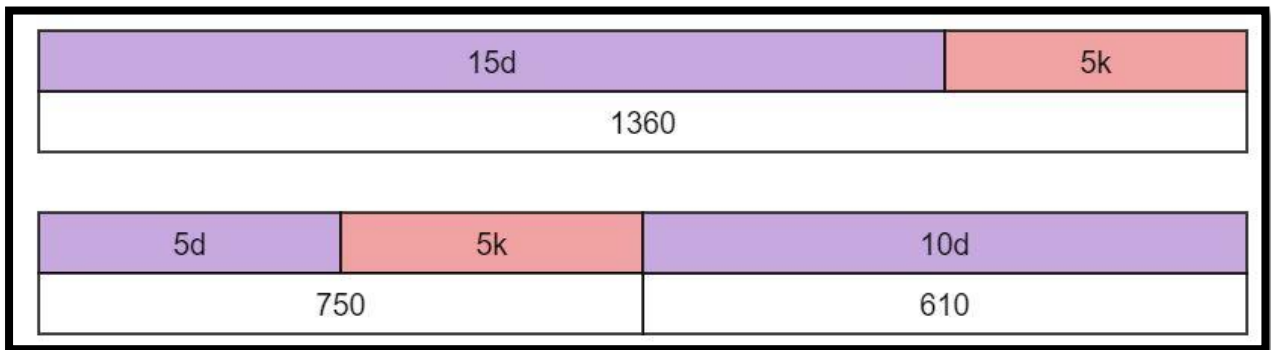
Langkah 3:

Pecahkan persamaan 2 dalam bentuk persamaan 1. Gunakan butang **Tambah** ataupun butang **Duplikasi** untuk duplikasi bar sehingga mendapat bar seperti Rajah 8.



**Rajah 8: Persamaan 2 Yang Diwakilkan Dalam Bentuk Persamaan 1**

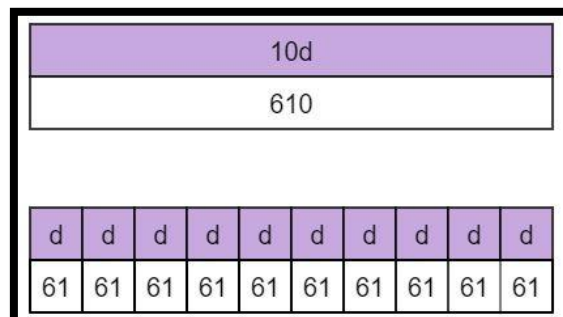
\*Nota:  $15d$  dan  $5k$  yang mewakili Persamaan 2 boleh ditulis semula dalam bentuk  $d + k = 150$  yang mewakili Persamaan 1 sebanyak 5 kali (seperti dalam Rajah 8) ataupun boleh dipecahkan dalam bentuk yang lebih mudah iaitu  $5d + 5k = 750$  (seperti dalam Rajah 9) Terdapat baki  $10d$  yang bersamaan dengan RM610.



**Rajah 9: Persamaan 2 Yang Diwakilkan Dalam Bentuk Persamaan 1 Dalam Bentuk Yang Lebih Mudah**

Langkah 5:

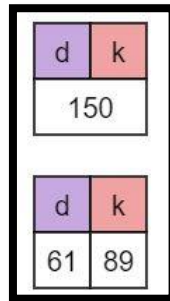
Selesaikan persamaan  $10d = 610$ , dengan membahagikan 610 kepada 10. Dengan menggunakan butang *Tambah* ataupun butang *Duplikasi* bar, tunjukkan bahawa  $d = 61$ .



**Rajah 10: Persamaan  $10d = 610$  dan  $d = 61$**

Langkah 6:

Masukkan nilai  $d = 61$  ke dalam persamaan 1 dalam bentuk model bar. Dengan menggunakan butang **Tambah** ataupun butang **Duplikasi** bar, tunjukkan bahawa  $61 + k = 150$  dan  $k = 89$ .



Rajah 11: Persamaan  $d + k = 150$  dan  $d = 61, k = 89$

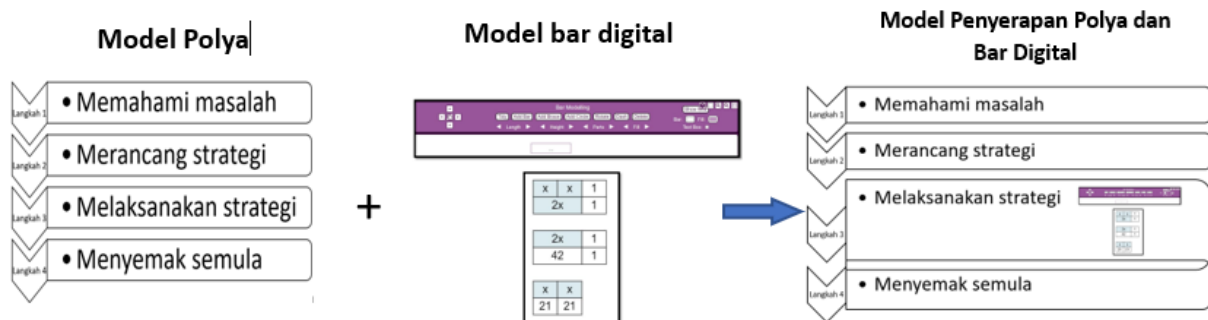
#### d. Semakan semula

Semakan semula boleh dilakukan dengan mengantikan nilai  $d = 61$  dan  $k = 89$  ke dalam persamaan 2. Didapati bahawa hasil jumlah persamaan 2 bersamaan dengan 1360.

$$15(61) + 5(89) = 1360$$

#### Model Penyerapan Polya dan Bar Digital

Dalam pembangunan inovasi ini, Model bar digital berfungsi sebagai strategi tambahan dan diserapkan pada langkah ke-3 di dalam Model penyelesaian masalah Polya iaitu Pelaksanaan Strategi. Model Penyerapan Polya dan Bar Digital ini digunakan dalam mereka bentuk unit-unit dalam Modul Kemahiran Berfikir Algebra yang dibangunkan sebagai panduan guru untuk melaksanakan proses PdP.



Rajah 12: Penyerapan Model Bar Digital di dalam Model Penyelesaian Masalah Polya

#### Kajian Lepas

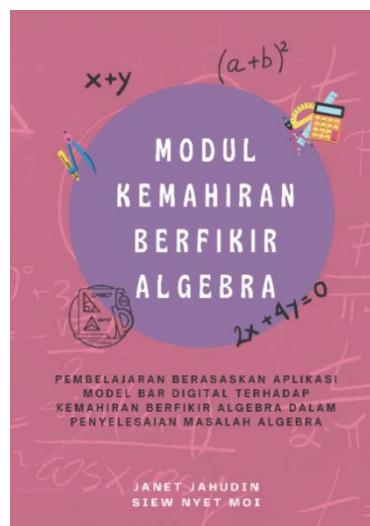
Kajian tentang kemahiran berfikir algebra telah mula mendapat perhatian sejak konsep ini diperkenalkan oleh Kaput *et al.* (2008). Kebanyakan tumpuan kajian yang melibatkan kemahiran algebra adalah untuk membangunkan aktiviti dan strategi untuk meningkatkan tahap pemikiran algebra pelajar (Afonso, 2019; Gambari *et al.*, 2016; Hunter & Miller, 2020; Kusumaningsih *et al.*, 2018; Mulligan *et al.*, 2020; Obara, 2019; Pourdavood *et al.*, 2020; Walkowiak, 2014; Wu, 2017). Dalam kajian yang dijalankan oleh Papadopoulos dan Patsiala (2019), dapatan kajian mendapati bahawa aktiviti berunsurkan teknologi digital memberi kesan positif kepada pemikiran algebra pelajar. Dapatan kajian lepas menyatakan bahawa kaedah model bar adalah satu kaedah versatile dalam strategi penyelesaian matematik yang

menyediakan pelajar dengan strategi yang berkesan, bertindak sebagai alat untuk pelajar menyesuaikan diri dalam menyelesaikan masalah matematik yang mencabar (Ismail, 2014) dan untuk memahami sesuatu konsep pada tahap kompleks (Ciobanu, 2015). Kaedah ini dikatakan boleh membantu pelajar dengan menggunakan ilustrasi konkrit, bergambar dan pendekatan abstrak bagi meningkatkan pemahaman pelajar (Ariffin *et al.*, 2017; Baker, 2011) serta secara langsung memupuk sikap positif pelajar dalam PdP Matematik (Krongthong Khairiree, 2019).

Kurikulum matematik di Malaysia telah merujuk Model Polya sebagai model panduan dalam melakukan penyelesaian masalah matematik dan model ini sering digunapakai dalam buku teks matematik di Malaysia (Nik Nur Fadhlillah *et al.*, 2014) dan diguna secara meluas dalam proses penyelesaian masalah (Parwati *et al.*, 2018). Malik dan Jo-Coldwell (2017) menyarankan penggunaan model Polya bagi membantu proses penyelesaian masalah dalam proses PdP. Ini disokong oleh kajian yang dijalankan oleh Wang dan Hwang (2017) yang menunjukkan bahawa strategi pembelajaran dengan menggunakan teknik yang betul memberi manfaat kepada pelajar dari segi meningkatkan kemahiran penyelesaian masalah, membangunkan proses berfikir dan kemahiran fleksibel yang boleh menjadi pemacu dalam menyelesaikan masalah (Prahani *et al.*, 2016) disamping mampu untuk mengembangkan inkuiri, perhatian dan minat pelajar dalam meningkatkan keyakinan diri pelajar dalam menyelesaikan masalah (Mustika & Riastini, 2017).

### Metodologi

Modul Kemahiran Berfikir Algebra direka khas untuk pelajar Tingkatan Satu. Objektif Modul Kemahiran Berfikir Algebra adalah untuk memupuk kemahiran berfikir algebra dalam penyelesaian masalah algebra melibatkan tiga konstruk, iaitu i) Kemahiran Generalisasi Aritmetik (KGA), ii) Kemahiran Fungsi (KF), dan iii) Kemahiran Pemodelan (KM). Pelajar membentuk, melabel dan membentang langkah penyelesaian masalah menggunakan kaedah Model Bar Digital. Rajah 13 menunjukkan gambar muka hadapan Modul Kemahiran Berfikir Algebra.



**Rajah 13: Gambar Muka Hadapan Modul Kemahiran Berfikir Algebra**

### **Kandungan Modul Kemahiran Berfikir Algebra**

Modul Kemahiran Berfikir Algebra terdiri daripada enam unit. Setiap unit mengandungi i) rancangan pengajaran harian (RPH), ii) panduan penggunaan model bar digital, iii) rangsangan, iv) prosedur pelaksanaan penyelesaian masalah algebra, dan v) rubrik penskoran. Kesemua unit ini dibina mengikut Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran, Kementerian Pendidikan Malaysia. Berikut merupakan penerangan tentang intipati bagi setiap unit modul sebagai panduan kepada guru.

#### ***Rancangan Pengajaran Harian (RPH)***

RPH disediakan sebagai panduan guru melaksanakan aktiviti PdP. Lampiran 1 menunjukkan satu contoh rancangan pengajaran harian yang mengaplikasi Model Penyerapan Polya dan Bar Digital. Setiap RPH diperuntukkan masa selama 60 minit untuk pelaksanaan. Namun demikian, cadangan masa pelaksanaan RPH ini boleh disesuaikan mengikut masa PdP di sekolah di mana modul ini boleh dilaksanakan di luar waktu kelas.

#### ***Panduan Penggunaan Model Bar Digital***

Tatacara penggunaan Model Bar Digital diterangkan secara terperinci dalam Modul Kemahiran Berfikir Algebra. Panduan ini memberikan gambaran kepada guru bagaimana membimbing pelajar untuk menerokai proses penyelesaian masalah secara semula jadi dan bukan secara hafalan.

#### ***Rangsangan***

Rajah 14 memaparkan salah satu rangsangan berbentuk masalah algebra yang perlu diselesaikan oleh pelajar.



**Rajah 14: Contoh Rangsangan Berbentuk Masalah Algebra**

### ***Prosedur Pelaksanaan Penyelesaian Masalah Algebra***

Penyelesaian masalah algebra dilaksanakan mengikut empat peringkat Model Polya iaitu a) memahami situasi masalah, b) merancang strategi penyelesaian masalah, c) melaksana strategi penyelesaian masalah, d) menyemak semula jawapan.

Berikut merupakan contoh pelaksanaan penyelesaian masalah algebra mengikut empat peringkat Model Polya.

#### **Langkah 1: Apa yang anda faham daripada bahan rangsangan? (Memahami Situasi Masalah)**

- i. Senaraikan beberapa nombor bulat secara berturutan. Jelaskan sifat dan ciri nombor bulat berdasarkan senarai tersebut.

#### **Langkah 2: Berdasarkan corak nombor bulat yang berturutan, tentukan pemboleh ubah dan operasi matematik (Merancang Strategi Penyelesaian Masalah)**

- i. Berdasarkan sifat dan ciri nombor bulat yang anda perolehi, nyatakan corak nombor bulat yang dapat dilihat.
- ii. Nyatakan pemboleh ubah dan operasi matematik yang boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah.

#### **Langkah 3: Siapakah Si Nombor Bulat tersebut? (Melaksanakan Strategi Penyelesaian Masalah)**

- i. Berdasarkan corak nombor yang telah dikenal pasti, bentukkan satu persamaan linear dalam satu pemboleh ubah untuk menunjukkan hubungan diantara dua nombor bulat yang berturutan.
- ii. Seterusnya dalam kumpulan anda, bina dua bar yang boleh mewakili persamaan linear dalam satu pemboleh ubah bagi hasil tambah dua nombor bulat tersebut.
- iii. Dengan menggunakan aplikasi model bar digital, tunjukkan penyelesaian bagi persamaan linear dalam satu pemboleh ubah tersebut dan pastikan anda juga menunjukkan konsep kesamaan melalui rajah bar yang dibina.
- iv. Nyatakan nilai bagi dua nombor bulat berturutan tersebut hasil daripada langkah penyelesaian anda.
- v. Kemudian nyatakan hasil darab bagi dua nombor bulat tersebut.

Rajah 15 menunjukkan contoh penyelesaian menggunakan aplikasi Model Bar Digital. Berdasarkan soalan yang diberikan, persamaan linear yang boleh dibentuk ialah seperti berikut.

$$x + x + 1 = 43$$

*Nota:  $x$  = nombor bulat yang pertama,  $x + 1$  = nombor bulat yang kedua*

x	x	1
2x		1
2x	1	
42	1	
x	x	
21	21	

**Rajah 15: Contoh Penyelesaian Menggunakan Aplikasi Model Bar Digital**

Melalui Model Bar pada Rajah 15, pelajar boleh melihat dengan jelas bahawa  $2x$  bersamaan dengan 42. Dapatan ini membantu pelajar untuk menyatakan nilai bagi  $x$  dan seterusnya nilai bagi dua nombor bulat yang berturutan.

**Langkah 4: Buktikan Si Nombor Bulat (Menyemak Semula)**

- i. Berdasarkan hasil dapatan bagi dua nilai nombor bulat tersebut, semak semula sama ada dua nilai nombor bulat yang diperolehi memuaskan persamaan linear dalam satu pemboleh ubah pada 3(i).
- ii. Nyatakan keputusan anda.

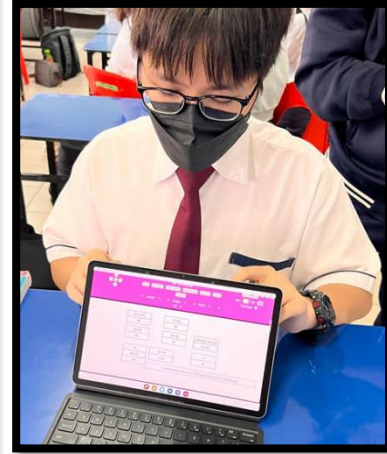
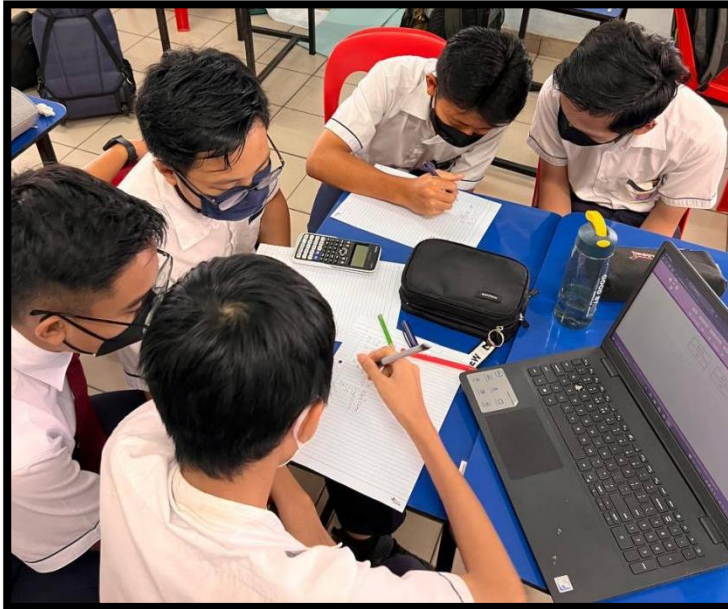
**Pembentangan Penyelesaian Masalah Algebra**

Setiap kumpulan diminta membentangkan langkah penyelesaian melalui Model Penyerapan Polya dan Bar Digital. Setiap kumpulan harus menyatakan ciri seperti di bawah:

- i. Pemboleh ubah yang terlibat.
- ii. Persamaan linear dalam satu pemboleh ubah yang telah dibentuk.
- iii. Langkah-langkah menyelesaikan persamaan linear menggunakan aplikasi model bar digital.
- iv. Membuktikan nilai dua nombor bulat yang diperolehi memuaskan persamaan linear dalam satu pemboleh ubah.



Rajah 16 menunjukkan pelajar sedang menyelesaikan masalah algebra menggunakan Model Penyerapan Polya dan Bar Digital. Rajah 17 pula menunjukkan satu contoh hasil kerja pelajar.



**Rajah 16: Pelajar menyelesaikan masalah algebra menggunakan Model Penyerapan Polya dan Bar Digital.**

Bar Modelling

Tidy Add Bar Add Brace Add Circle Show Grid

Rotate Dash Delete Font Size: 20 Bar: Fill: Text Box: ■

◀ Length ▶ ▶ Height ▶ ▶ Parts ▶ ▶ Filled ▶

$x + x + 1$
43

$x + 1$
$y$

} nombor bulat kedua

$2x$	1
42	1

$x$	1
21	1
22	

$x$	$x$
21	21

Nombor bulat pertama	Nombor bulat kedua
21	22

**Rajah 17: Hasil kerja Pelajar**

**Rubrik Penskoran Penyelesaian Masalah Algebra**

Dalam modul ini, kriteria utama dalam penskoran penyelesaian masalah algebra adalah berdasarkan salah satu komponen seperti yang digunapakai oleh Lembaga Peperiksaan Malaysia (2013) iaitu Kemahiran (K). Fokus kemahiran dalam modul ini ialah tiga konstruk

Kemahiran Berfikir Algebra iaitu Kemahiran Generalisasi Aritmetik (KGA), Kemahiran Fungsi (KF) dan Kemahiran Pemodelan (KM). Kriteria penskoran konstruk ini bertujuan untuk mendapatkan skor yang tepat dan juga untuk mengelakkan daripada kemungkinan berlaku kesilapan penskoran dalam menilai proses penyelesaian masalah algebra. Prosedur penskoran yang mematuhi kriteria ini akan memberi gambaran yang tepat terhadap penguasaan kemahiran berfikir algebra pelajar. Jadual 3 menunjukkan rubrik penskoran bagi penyelesaian masalah algebra berbunyi ‘Hasil tambah 2 nombor bulat berturutan adalah 43. Apakah hasil darab 2 nombor tersebut?’

**Jadual 3: Rubrik Penskoran**

NO	SKEMA	CATATAN												
1	<p><math>x</math> sebagai satu nombor bulat yang pertama  <math>x + 1</math> sebagai satu nombor bulat yang kedua  <math>x + x + 1 = 43</math>  <math>2x + 1 = 43</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>2x</math></td> <td style="text-align: center;"><math>1</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"><math>43</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>2x = 42</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>2x</math></td> <td style="text-align: center;"><math>1</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>42</math></td> <td style="text-align: center;"><math>1</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>x = 21</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="text-align: center;"><math>x</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>21</math></td> <td style="text-align: center;"><math>21</math></td> </tr> </table> <p>Dua nombor bulat yang berturutan ialah 21 dan 22            Hasil darab dua nombor bulat tersebut = <math>21 \times 22</math>  <math>= 462</math></p>	$2x$	$1$	$43$		$2x$	$1$	$42$	$1$	$x$	$x$	$21$	$21$	<p>KF (1)            KGA (1)            KM (1)            N1            N1            N1</p>
$2x$	$1$													
$43$														
$2x$	$1$													
$42$	$1$													
$x$	$x$													
$21$	$21$													

Nota: N1 bermakna 1 markah diberi kepada nilai (N) yang diperolehi. K(1) bermakna 1 markah diberi kepada kemahiran yang ditunjukkan dalam konstruk dinilai.

### Penilaian Modul Kemahiran Berfikir Algebra Oleh Pakar

Kesahan kandungan Modul Kemahiran Berfikir Algebra telah dinilai oleh lima panel pakar dalam bidang Pendidikan Matematik yang terdiri daripada dua orang pensyarah masing-masing dari universiti dan institut pendidikan guru dan seorang Ketua Panitia Matematik. Hasil penilaian modul mendapati nilai Indeks Kesahan Kandungan Item (I-CVI) bagi setiap aspek dalam unit modul adalah melebihi 0.78. Bagi penentuan I-CVI, Polit *et al.* (2017) mencadangkan bahawa item yang mempunyai nilai I-CVI yang kurang daripada 0.78 akan dipertimbangkan untuk diubahsuai dan dimurnikan berdasarkan cadangan, komen serta perbincangan dengan kumpulan pakar. Ini menunjukkan kesahan kandungan Modul Kemahiran Berfikir Algebra menurut panel pakar adalah tinggi dan boleh diterima.

## Dapatan Kajian

Modul Kemahiran Berfikir Algebra telah diuji ke atas 120 pelajar Tingkatan Satu di sebuah sekolah menengah di Daerah Tuaran, Sabah. Pelajar diberikan Instrumen Ujian Kemahiran Berfikir Algebra yang bertujuan untuk mentaksir penguasaan kemahiran berfikir algebra (KBA) pelajar dalam penyelesaian masalah algebra sebelum dan selepas pelaksanaan intervensi menggunakan Modul Kemahiran Berfikir Algebra. Analisis data inferensi dilaksanakan menggunakan Ujian-t sampel berpasangan untuk menentukan sama ada terdapat perbezaan yang signifikan antara skor min ujian pra dan ujian pasca KBA. Jadual 4 menunjukkan hasil analisis Ujian-t sampel berpasangan bagi kemahiran berfikir algebra ( $t(119) = -17.553, p < .05$ ).

**Jadual 4: Ujian-T Sampel Berpasangan Untuk Skor Min Ujian Pra Dan Ujian Pasca**

Pair	$\bar{x}$	$s$	$\sigma_M$	95% Confidence Interval of the Difference		$t$	$df$	$p$
				Lower	Upper			
				Ujian Pra – ujian Pasca	-21.542			

Nota:  $\bar{x}$  = mean,  $S$  = standard deviation,  $\sigma_M$  = the standard error of the mean,  $t$  = test statistic,  $df$  = the degrees of freedom,  $p$  = probability value

Jadual 5 menunjukkan hasil analisis Ujian-t Sampel Berpasangan bagi tiga konstruk kemahiran berfikir algebra. Hasil analisis adalah signifikan bagi pembezaan kemahiran generalisasi aritmetik ( $t(119) = -17.964, p < .05$ ), kemahiran fungsi ( $t(119) = -18.713, p < .05$ ), dan Kemahiran pemodelan ( $t(119) = -15.368, p < .05$ ). Ini menunjukkan bahawa terdapat perbezaan yang signifikan dalam skor min antara Ujian Pra dan Pasca bagi ketiga-tiga konstruk kemahiran berfikir algebra.

**Jadual 5: Ujian-t Sampel Berpasangan antara Skor Min Ujian Pra dan Ujian Pasca berdasarkan Konstruk**

Pasangan	$\bar{x}$	$s$	$\sigma_M$	95% Confidence Interval of the Difference		$t$	$df$	$p$
				Lower	Upper			
				Pra GA – Pasca GA	-4.733			
Pra F – Pasca F	-5.950	3.483	.318	-6.580	-5.320	-18.713	119	$p < .05$
Pra M – Pasca M	-10.858	7.740	.707	-12.257	-9.459	-15.368	119	$p < .05$

## Perbincangan

Dapat dirumuskan bahawa penguasaan kemahiran berfikir algebra meningkat selepas pelajar mengikuti PdP menggunakan Modul Kemahiran Berfikir Algebra. Ini menunjukkan kaedah heuristik melalui Model Penyerapan Polya dan Bar Digital membantu pelajar dalam menyelesaikan masalah algebra bukan rutin. Menurut Morin *et al.*, (2017), kaedah model bar bukan sahaja berfungsi sebagai alat visualisasi malah menjadi alat yang merangsang perkembangan kognitif pelajar dalam proses penyelesaian masalah.

Hasil pengujian juga membuktikan bahawa Modul Kemahiran Berfikir Algebra memberikan impak positif terhadap pemupukan kemahiran generalisasi aritmetik, fungsi dan pemodelan dalam kalangan pelajar Tingkatan Satu. Dalam menguasai kemahiran generalisasi aritmetik,

pelajar perlu menguasai kemahiran menentukan operasi dan pemboleh ubah, dan mengubahsuai teks soalan kepada pernyataan matematik. Ini disokong oleh Maputol, (2019) yang menyatakan bahawa operasi asas tambah, tolak, darab dan bahagi yang asas boleh diaplikasikan secara berperingkat ke dalam algebra dengan menekankan pola, pengeneralisasian, dan bagaimana nombor berkaitan antara satu sama lain.

Modul Kemahiran Berfikir Algebra juga menyokong peningkatan dalam kemahiran fungsi yang menekankan pengecaman pola dan corak nombor serta hubungan antara pemboleh ubah. Kaput (1999) mengesyorkan penggunaan pelbagai perwakilan visual seperti gambar rajah, jadual nilai, persamaan dan graf untuk mewakili hubungan fungsi kerana ini dapat menyokong pembelajaran konseptual. Modul Kemahiran Berfikir Algebra juga memberi kesan positif terhadap penguasaan kemahiran pemodelan yang menfokuskan pemahaman tanda simbol “sama dengan” dalam persamaan linear dan pengiraan yang melibatkan pemboleh ubah. Ini disokong oleh hasil kajian Jan dan Rodrigues (2012) yang mendapati bahawa lukisan model bar dan model penyelesaian masalah Polya (1945) membolehkan pelajar merumuskan persamaan matematik dengan mudah dan yakin. Melalui lukisan model bar yang dihasilkan, pelajar dapat memvisualisasikan hubungan antara yang diketahui dan yang tidak diketahui dalam penyelesaian masalah bukan rutin. Demikian juga menurut Warren dan Cooper, (2009) dan Vlassis (2002), kaedah model bar mampu membantu pelajar dalam memahami makna simbol “sama dengan” iaitu maksud kesamaan antara kedua belah persamaan linear dan bukan sebagai simbol kepada jawapan akhir.

Kupasan perbincangan di atas menunjukkan bahawa Model Penyerapan Polya dan Bar Digital dapat menjamin peningkatan dalam penguasaan kemahiran berfikir algebra dalam kalangan pelajar Tingkatan satu.

### **Kesimpulan**

Modul Kemahiran Berfikir Algebra terbukti berupaya untuk meningkatkan penguasaan kemahiran berfikir algebra dalam kalangan pelajar Tingkatan Satu melalui tiga konstruk Kemahiran Berfikir Algebra Ralston iaitu generalisasi aritmetik, fungsi dan pemodelan. Ini menunjukkan strategi penyelesaian masalah yang diaplikasikan dalam Modul Kemahiran Berfikir Algebra melalui Model Penyerapan Polya dan Bar Digital dapat membantu pelajar dalam penyelesaian masalah algebra bukan rutin. Kedua-dua Model Penyelesaian Masalah Polya dan Kaedah Model Bar merupakan kaedah heuristik yakni strategi penyelesaian masalah matematik yang dilakukan secara sistematik. Ini bermakna kaedah heuristik melalui Model Penyerapan Polya dan Bar Digital mampu memberi kesan terhadap penguasaan kemahiran berfikir algebra dalam kalangan pelajar Tingkatan Satu.

Modul Kemahiran Berfikir Algebra memberikan nilai tambah kepada amalan bilik darjah dan inovasi kurikulum dengan mengetengahkan strategi penyelesaian alternatif melalui Model Penyerapan Polya dan Bar Digital terhadap penyelesaian masalah algebra bukan rutin. Bukan itu sahaja, strategi penyelesaian alternatif ini boleh diketengahkan sebagai strategi untuk mengajar murid menyelesaikan masalah matematik berayat pada tahap sekolah rendah. Selain itu, Modul Kemahiran Berfikir Algebra boleh digunakan dalam membudayakan pembelajaran Matematik secara digital dan aktif di kelas. Malahan pakar aplikasi teknologi juga boleh mentransformasikan kaedah model bar ini ke dalam bentuk permainan digital untuk menarik minat pelajar dalam PdP matematik yang melibatkan penyelesaian masalah bukan rutin.

## Penghargaan

Pengkaji ingin merakamkan penghargaan kepada Kementerian Pendidikan Tinggi Malaysia yang telah membiayai kajian ini di bawah Skim Geran Penyelidikan Fundamental (FRGS) Tahun 2021, FRGS/1/2021/SSIO/UMS/02/7.

## Rujukan

- Afonso, D. G. (2019). The development of algebraic thinking in the foundation phase: a comparative study of two different curricula (Doctoral dissertation, Cape Peninsula University of Technology).
- Arifin, S., Putri, R. I. I., Hartono, Y., & Susanti, E. (2017, December). Developing Ill-defined problem-solving for the context of "South Sumatera". In *Journal of physics: Conference series* (Vol. 943, No. 1, p. 012038). IOP Publishing.
- Baker, A. (2011). Explaining the applicability of mathematics in science. *Interdisciplinary Science Reviews*, 36(3), 255-267.
- Ciobanu, M. (2015). IN THE MIDDLE-USING EFFICIENT VISUAL REPRESENTATIONS TO SOLVE MATHEMATICAL WORD PROBLEMS. *Gazette-Ontario Association for Mathematics*, 53(3), 16.
- Dendane, A. (2009, April 16). Skills needed for mathematical problem solving. [https://www.analyzemath.com/mathe\\_problems/paper\\_1.html](https://www.analyzemath.com/mathe_problems/paper_1.html).
- Gambari, A. I., Shittu, A. T., Falode, O. C., & Adegunna, A. D. (2016). Effects of computer-self interactive package (csip) on students' performance, achievement level and attitude toward mathematics at secondary school level in Nigeria.
- Hoon, T. S., Singh, P., Han, C. T., & Kee, K. L. (2013). Heuristic approach experience in solving mathematical problems. *Educational Research*, 4(8), 607-611
- Hunter, J., & Miller, J. (2022). Using a culturally responsive approach to develop early algebraic reasoning with young diverse learners. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21.
- Jan, S., & Rodrigues, S. (2012). Model drawing strategy: A tool to link abstract words to real life. *International Researcher*, 1(4), 137-148.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah: Erlbaum
- Kaput, J., & Schorr, R. (2008). The case of SimCalc, algebra, and calculus. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives*, 2, 211.
- Khairiree, K. (2019). Augmented Reality and Blended Learning: Engaging Students Learn Word Problems with Bar Model and the Geometer's Sketchpad. In *Proceeding of the 24th Asian Technology Conference in Mathematics*.
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2004). Promotion of heuristic literacy in a regular mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 33-39.
- Kusumaningsih, W., & Herman, T. (2018). Improvement Algebraic Thinking Ability Using Multiple Representation Strategy on Realistic Mathematics Education. *Journal on Mathematics Education*, 9(2), 281-290.
- Malik, S. I., & Coldwell-Neilson, J. (2017). A model for teaching an introductory programming course using ADRI. *Education and Information Technologies*, 22, 1089-1120.
- Mamat, N., & Wahab, M. N. A. (2022). Kajian Masalah Pembelajaran Matematik di kalangan Pelajar Sekolah Rendah Luar Bandar. *Malaysian Journal of Social Sciences and Humanities (MJSSH)*, 7(6), e001531-e001531.



- Maputol, E. (2019). The Use of Bar Models in Solving Mathematical Problems: Its Effect on Academic Performance. *Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research*, 7(2), 10–16. <http://www.apjmr.com/wp-content/uploads/2019/05/APJMR-2019-7.2.002.pdf>
- Morin, L. L., Watson, S. M. R., Hester, P., & Raver, S. (2017). The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 40(2), 91–104. <https://doi.org/10.1177/0731948717690116>
- Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (Eds.). (2017). *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>
- Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a ‘pattern and structure’ intervention program. *ZDM*, 52, 663–676.
- Mustika, I.K. & Riastini, P.N. (2017). Pengaruh model polya terhadap kemampuan pemecahan masalah matematika siswa kelas V sd. *International Journal of Community Service Learning*, 1 (1), hlm, 31-38
- Nik Nur Fadhlillah Abd Razak, Azurah Mohd Johar, Desi Andriani, & Yee, C.Y. (2014). Keupayaan Penyelesaian Masalah Matematik Dalam Kalangan Pelajar Tingkatan 2. *Jurnal Pendidikan Matematik*, 2(2): 1-13
- Novotná, J. (2014). Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1–6. <https://doi.org/10.7160/eriesj.2014.070101>
- Obara, S. (2019). Pre-Service Teachers Exploring the Role of Pattern-Based Reasoning in the Context of Algebraic Thinking. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(11).
- Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2019). When the “Tug-of-War” game facilitates the development of algebraic thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 1401-1421.
- Parwati, N. N., Sudiarta, I., Mariawan, I., & Widiana, I. W. (2018). Local wisdom-oriented problem-solving learning model to improve mathematical problem-solving ability. *JOTSE: Journal of technology and science education*, 8(4), 310-320.
- Polit, D.F., Beck, C.T., 2017. *Nursing Research: Generating and Assessing Evidence for Nursing Practice*, tenth ed. Wolters Kluwer Health, Philadelphia, p. 784. <https://doi.org/10.1016/j.iccn.2015.01.005>.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*, Princeton NJ: Princeton U. Press
- Pourdavood, R., McCarthy, K., & McCafferty, T. (2020). The Impact of Mental Computation on Children's Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning, and Algebraic Thinking. *Athens journal of Education*, 7(3), 241-253.
- Prahani, B. K., Limatahu, I., Winata, S. W., Yuanita, L., & Nur, M. (2016). Effectiveness of physics learning material through guided inquiry model to improve student’s problem solving skills based on multiple representation. *International journal of education and research*, 4(12), 231-244.
- Ralston, N. (2013). *The development and validation of a diagnostic assessment of algebraic thinking skills for students in the elementary grades (Doctoral dissertation)*.
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(1), 29–35. <https://doi.org/10.1007/bf02655690>
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 341–350. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.00>

- Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341–359. <https://doi.org/10.1023/a:1020229023965>
- Wang, X. M., & Hwang, G. J. (2017). A problem posing-based practicing strategy for facilitating students' computer programming skills in the team-based learning mode. *Educational Technology Research and Development*, 65, 1655-1671
- Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56-71.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 76–95. <https://doi.org/10.1007/bf03217546>
- Wu, H. (2017). *Computability theory and algebra* (Doctoral dissertation)